KIS MATEMATIKA

1. Bevezető

Fizikus vagyok, és azon belül is elméleti fizikusnak tartom magam, mindemellett nagyon fontosnak tartom a kísérleti fizikát is, sőt magam is kísérleteztem a gravitáció területén. A matematikával csak szükséges mértékben tartom a kapcsolatot. A legfontosabb állítás: sikeres fizika nem létezik matematika nélkül. Ez Newton óta megcáfolhatatlan tény, de már előtte Galilei is számolt, hogy egyszerű méréseit alátámassza (mozgás lejtőn, a gyorsulás képlete, stb.).

Mind a kísérleti fizika, mind a matematika fokozott óvatosságot követel, ezt soha nem szabad elfelejteni. Szerencsésnek tartom magam, hogy a debreceni egyetemen (KLTE) végeztem (nagyon régen: 1972-ben), az ottani különleges matematika tanáraimnak köszönhetem a matematika iránti tiszteletemet és igényességemet. A tudomány állításait szigorúan bizonyítani kell, a bizonyítás módszereit a matematika több évszázados hagyományainak ismeretén keresztül lehet csak elsajátítani. A matematika az alap, melyre minden műszaki-fizikai tudományos kutatás épül. Tapasztalataim szerint, aki nem szerzi meg a matematikai alapokat kellő időben (elég fiatalon), azt már később sosem tudja pótolni (esetleges kivételek persze létezhetnek, ami csak megerősíti állításomat).

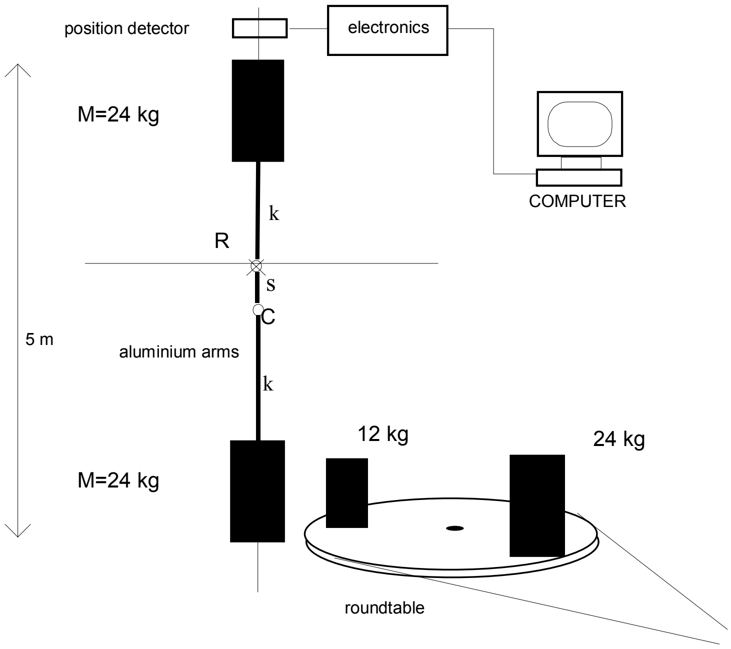
A matematikus erények sok esetben hátrányokat is jelentenek. A színtiszta matematikai gondolkodás hajlamos elszakadni a valóságtól, pontosabban a valóság igényeitől. Kellenek a fizikusok, a mérnökök, a vegyészek és más olyanok, akik a gyakorlatban hasznosítják a matematikát, és jelzik az igényeiket a matematikusoknak, akik inkább szeretnek a saját maguk által kiépített elefántcsonttornyukban maradni. A jelen dolgozatomban éppen egy olyan alkalmazott matematikai problémára utalok, ami remélhetően csak időleges probléma marad. A matematikusok, fizikusok, mérnökök évszázadokon keresztül papíron, ceruzával számoltak, egészen az elmúlt két-három évtizedig. Forradalmi változást jelentett a számítógép megjelenése, ma már a számítógépek teljesítménye, gyorsasága és pontossága minden képzeletet felülmúl. Ennek ellenére a matematikus társadalomban még mindig megmaradt a több évszázados tradíció, a numerikus számítások terjedelmének csökkentési igénye, de leginkább elkerülése. Csak olyan matematikai problémákkal foglalkoztak évszázadokon keresztül még a nagynevű matematikusok is, amelyek analitikus alakban megoldhatók. Arra törekedtek, hogy például a differenciálegyenletek megoldását jól ismert, „analitikus" függvényekkel lehessen megadni (ilyen analitikus függvények például az exponenciális, trigonometrikus függvények és ezek inverzei). Emlékeztetek arra, hogy középiskolában a matematikai példatárak kizárólag „előre gyártott" feladatokat tartalmaztak, melyek analitikusan, zárt alakban, az ismert függvényekkel megoldhatók voltak. Ebben természetesen nincs semmi kivetnivaló, hiszen a cél éppen a matematikai ismeretek, módszerek („a matematikai kézügyesség") elsajátítása.

A számítógépek megjelenése, mint általában minden új találmány, óriási lehetőségeket nyitott meg a matematikában is, és természetesen káros „mellékhatásokkal" is járt. A számítógép előnyeit mindenki jól ismeri, a furcsa hátrányai között említendő a számítógép függőség kialakulása. De most egészen más hátrányára szeretnék rámutatni, itt a matematikai gondolkodás elnyomására gondolok. A legismertebb példa az EXCEL program, ami „felhasználóbarát", de az alkalmazókat leszoktatja arról, hogy saját maguk készítsenek számítógépes programokat a saját speciális igényük kielégítésére. Ennek még durvább példái is vannak, amikor jó pénzért lehet kapni olyan speciális fizikusi, mérnöki, kémiai, biológiai, stb. programcsomagokat, melyekbe csak be kell táplálni a kiinduló adatokat és a gép „mindent" kiszámol. A programcsomag működése, minősége, esetleg hibái persze rejtve maradnak, ellenőrzésükre semmi lehetőség. Az ember alapvetően lusta (jómagam is), vakon bízik a „gyári" programokban, megnyugtatva magát azzal, hogy mások is ezt használják. Így vagyunk speciálisan a differenciálegyenlet megoldó programokkal is. Ennek hosszú távú következménye az lehet, hogy a lexikális tudást követelő egyetemek, főiskolák lassan nem tartják fontosnak a matematikai alaptudás, készség átadását, hivatkozva az egyszerűbb számítógép használatra. Ami számomra fájdalmas, hogy a matematika lassan szoftveres árucikkre degradálódik, és persze mellékesen a szellemi termék hasznát nem a programozó zsebeli be, hanem az „üzletember”, aki az Interneten árulja a portékát. Az ellentmondások, a problémák felsorolását nem szeretném itt folytatni, aki benne van a szoftver világában, ezeket jól ismeri.

A jelen munkában egy első ránézésre egyszerűnek tűnő matematikai problémát, illetve annak megoldását mutatom be. Menet közben derült ki, hogy az ördög a részletekben van, és a részletek sok fejtörést okoznak a fizikusnak, aki inkább a fizikai problémával szeretne foglalkozni és nem a matematikával birkózni. A fáradságos tévutakat nem akarom ismertetni, csupán a nehezen kiizzadott eredményeimet szeretném itt közkinccsé tenni.

2. A gravitációs kísérlet

A gravitációs kísérleteimet, a néhai *Bodonyi László* nyomán, fizikai ingával végeztem. A mérés megbízhatóságának növelése céljából, különböző fizikai meggondolások alapján a *kvázirezonancia mérés* módszerét választottam. A mérési elrendezés vázlata a következő:

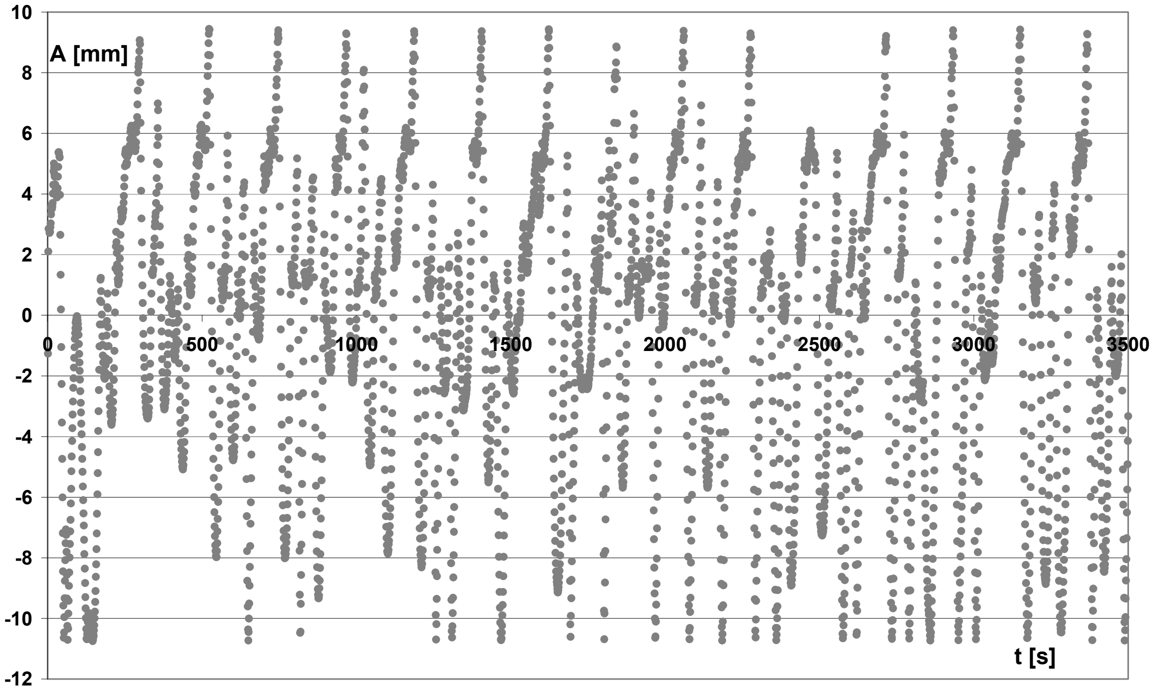


2.1. ábra: A kvázirezonancia mérés vázlata

A fizikai ingát sematikusan ábrázoltam, alsó, illetve felső tömege 24-24 kg tömegű ólomtégla. Az ábrán látható kör alakú forgató asztal *keményfából* készült az esetleges sztatikus mágneses hatások elkerülése céljából (az asztal anyaga készíthető bármely, nem ferromágneses anyagból is: pl. réz, alumínium, stb.). A körasztal átmérője egy méter. Az asztal forgatását egy 15 W-os teljesítményű egyenáramú motor biztosítja vékony gumiszíjon keresztül, a motor fordulatszáma elektronikusan szabályozható. A körasztalon úgy helyeztem el a *forrástömegeket*, hogy azok lehetőleg minél közelebb legyenek az inga alsó tömegéhez (közelítő felületek távolsága kb. 4-5 centiméter). A forgató asztal és a meghajtómotor vibrációs zaja a gumiszíjas meghajtás miatt csekély, és gyakorlatilag továbbra sem hatott az ingára, mivel az inga felfüggesztése a mennyezeten történt. A mérési vázlat könnyebb érthetősége miatt nincs feltüntetve az inga hidraulikus csillapítója és az árnyékoló vaslemez, mely az ingát árnyékolja az esetleges mágneses hatásoktól, valamint a forrástömegek által keltett gyenge levegőáramtól.

A mérés során a villanymotor fordulata a nulláról indul, és nagyon lassan emelkedik, automatikus vezérléssel. A körasztal 280-290 másodperces fordulatánál az inga gravitációs rezonanciába kerül a két mozgásban lévő forrástömeggel.

Egy ilyen mérés grafikonját mutatja a 2.2. ábra:



2.2. ábra: Egy kvázirezonancia mérés eredménye

Az ábra az inga mozgását mutatja az idő függvényében. Belátható, hogy egy-egy sikeres mérés elvégzése rendkívüli türelmet igényel, alaposan elő kell készíteni. A mérés csak szélcsendes időben végezhető, ugyanis a légszigetelt helyiség ellenére a külső, nagytömegű légáramlatok erős dinamikai gravitációs zavarokat okozhatnak a mérésben. A mérés műszaki részleteiről itt nem kívánok beszámolni, honlapom gravitációs fejezetében részletesen írok a gravitációs kísérleteimről.

A fizikai ingás gravitációs kísérletek számos meglepő eredményre vezettek, aminek részleteivel itt nem foglalkozom. Két meglepő dolog azonban a jelen íráshoz kapcsolódik: a gravitációs erő nagyságrendekkel nagyobbnak adódott, mint ami Newton törvényéből következne. A másik lényeges tapasztalat, hogy a gravitációs erő egyértelműen sebességfüggő. Mindezekből következik, hogy Newton törvénye csak speciális, az eddigi, hétköznapi tapasztalt esetekben érvényes. A fizikai ingás mérés egy különleges fizikai állapotot valósít meg, ugyanis a fizikai inga lengésidejének lehető legnagyobb mértékű megnövelése a fizikai ingák tömegére ható földi gravitációs teret fokozatosan kikapcsolja. Másképpen fogalmazva, ezzel az egyszerű módszerrel az ingatömegeket közel a *súlytalanság állapotába* visszük. Az eddig alkalmazott hagyományos gravitációs kísérletekben viszont ez a körülmény nem állt fenn. Szükségszerű tehát, hogy Newton gravitációs törvényét általánosítsuk a súlytalanság körülményére is. Jelenleg ugyanis az a tévhit uralkodik a fizikában, hogy Newton törvénye univerzális, minden körülmények között érvényes. A fizikai ingás kísérleteim ezt egyértelműen cáfolják.

Kérdés, hogyan általánosítsuk Newton törvényét, mely speciális esetben lényegesen erősebbnek mutatkozik (a gravitációs állandó nagyságrendekkel nagyobb), illetve hogyan vegyük figyelembe a sebességfüggést. Newton második törvénye értelmében egyszerűen képezzük a mért ingamozgás időfüggvényének második deriváltját, amit megszorozzuk a fizikai inga *effektív* mozgó tömegével, és így elvileg megkaphatjuk az általánosított gravitációs erőtörvényt. A gyakorlatban ez az egyszerű út egyelőre járhatatlannak tűnik. A nagy lengésidejű fizikai inga, lényegi működésének következtében, mozgása erősen zavarokkal terhelt. Ezt a problémát elvi okból a leggondosabb kísérleti kivitelezésnél sem lehet elkerülni. Matematikai úton meg tudjuk határozni az ingára ható gravitációs erő időbeli függését, de ebből még nem tudunk egyértelműen következtetni a gravitációs erő távolság, illetve sebesség függésére. Ehhez az ingamozgáson kívül pontosan kellene mérni a forrástömegek időbeli helyzetét és sebességét is, de erre nem volt lehetőségem a szerény műszaki feltételek mellett. Ha mégis, optimális esetben, minden mérési adat rendelkezésemre állna, akkor sem tudnám automatikusan megadni az általánosított gravitációs törvényt. Ehhez ugyanis még további, kiegészítő elméleti meggondolások is szükségesek. Nem is beszélve arról, hogy a mérések a gravitációs taszítás időleges jelenlétét is kimutatták. A kvázirezonanciás mérés lényegét tekintve egy időben erősen változó, dinamikus mérés. Sztatikus gravitáció mérésére a fizikai inga, érzéketlensége miatt nem alkalmas.

Az ingamozgás mérési adatsorából azonban számos következtetés viszonylag gyorsan levonható. *Fourier* transzformációval (FFT) meg lehet határozni a méréshez tartozó domináns frekvenciákat. A Fourier analízis például kimutatta, hogy az inga tömeggel egyenlő 24 kg-os forrástömeg gravitációs hatása egy nagyságrenddel kisebb, mint a 12 kg-os forrástömeg hatása. Ez önmagában ellentmond Newton törvényének.

Végül az ingamozgás kiértékelése céljából egy matematikai modellt állítottam fel, amelyben az általánosított (dinamikus) gravitációs törvény alakját a lehető legegyszerűbbre választottam meg. A modell kiszámítja az inga elméleti mozgását, amit össze tudok hasonlítani a mért ingamozgással. A modellben tetszőlegesen tudom változtatni az erőtörvény alakját, mindaddig, amíg elérem a mért és számított mérési adatok közelítő egyezését. A módszer alapján, viszonylagos biztonsággal meg tudom adni a dinamikus gravitáció erőtörvényét. Ez a program már a kezdetben sikeresnek bizonyult, de a további pontosításokhoz további mérések, kísérletek elvégzése elengedhetetlenül szükséges. Ehhez nagyon kívánatos még a mérési technika továbbfejlesztése, a megfelelő laboratóriumi körülmények biztosítása.

3. A matematikai modellezés

A fizikai inga csillapított harmonikus oszcillátorral modellezhető, amennyiben az inga kitérése kicsi az inga karhosszúságával összehasonlítva. A csillapított harmonikus oszcillátor differenciálegyenlete:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0\,, \tag{3.1}$$

ahol λ az inga csillapítási tényezője és $\omega_0 = k/m$ az oszcillátor frekvenciája. Az inga a súrlódás miatt exponenciálisan csökkenő periodikus mozgást végez, az inga a mozgási energiáját folyamatosan disszipálja. Az ingát fékező erő az inga pillanatnyi sebességével arányos. A *gravitációs gerjesztés* hatására az inga amplitúdója idővel beáll egy közel állandó értékre, mivel a gravitációs gerjesztés folyamatosan pótolja az inga energiaveszteségét. A fizikai inga gerjesztését leíró másodrendű, inhomogén differenciálegyenletet (3.1) kiegészítésével kapjuk:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)\,, \tag{3.2}$$

ahol $f(t) = F(t) / m^*$ a *gerjesztő erősűrűség,* itt m^* az inga *effektív mozgó tömege*.

A (3.1) differenciálegyenlet matematikai elnevezése: közönséges, másodrendű, lineáris, állandó együtthatós, homogén differenciálegyenlet. A „közönséges” szó azt jelenti, hogy nem *parciális* differenciálegyenlet. (Elnézést kérek az Olvasótól, de hagyatkoznom kell a korábbi, némi matematikát tanult emlékekre, ezért nem árulom el, mit jelent a „parciális” jelző. Akikben azonban semmiféle matematikai emlék nem maradt a „rosszon” kívül, azoknak sajnos nem tudom ajánlani a további elmerülést a további matematikai „szépségekben”.)

A (3.2) differenciálegyenlet matematikai elnevezése: közönséges, másodrendű, lineáris, állandó együtthatós, *inhomogén* differenciálegyenlet. A (3.1), illetve (3.2) egyenletek analitikus megoldásai már az elektronikus számítógépek megjelenése előtt jóval régebben ismertek voltak. Azt meg kell említeni, hogy azért általános alakú *f(t)* gerjesztő függvényre valószínűleg nincs általános, zárt analitikus megoldás. Már sok alkalommal, több órát töltöttem el Internetes keresgéléssel, hogy magyar, vagy angol nyelven találjak a (3.2) egyenletre általános megoldást, sajnos még eddig nem sikerült találnom. Kérem ezért a szakmabeli Olvasókat, ha ilyenről tudnak, feltétlenül írják meg nekem, előre is megköszönöm.

A matematika tankönyvek szerint a (3.2) inhomogén egyenlet megoldása tradicionálisan a következő módon történik. Először meg kell keresni a (3.1) homogén egyenlet általános megoldását. Az általános megoldás érthetően a csillapítási tényezőtől, illetve az oszcillátor sajátfrekvenciájától függ. A tankönyvek részletesen tárgyalják a különböző eseteket, melyek az említett konstans paraméterektől függnek. A fizikai inga szabad mozgását egy csillapodó lengés jellemzi, ilyen esetben az általános megoldás:

$$x(t) = A\exp\left(-\lambda t\right)\sin\left(\omega t+\alpha\right), \tag{3.3}$$

ahol *A*, illetve *alfa* a kezdőfeltételek által meghatározott állandók, a másodrendű differenciálegyenlet két integrációs állandója. A csillapodó lengés frekvenciája kisebb a csillapítatlan lengés frekvenciájánál:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2 > 0. \tag{3.4}$$

A (3.2) inhomogén (gerjesztett) differenciálegyenlet általános megoldása bizonyítható matematikai tétel szerint oly módon adható meg, hogy a (3.1) egyenlet általános megoldásához hozzáadjuk az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását. A (3.1) általános megoldása alatt azon megoldások körét értjük most, mely (3.3)-nak megfelelő, csillapodó lengésnek felel meg. A matematikusok (tankönyvek) gyakorlata szerint a (3.2) inhomogén egyenletben az *f(t)* gerjesztési függvény analitikusan megválasztott. Ráadásul még a következő feltételeket elégíti ki:

IDÉZET: (GRÄFF JÓZSEF, BME Gépészeti Kar, 2004)

Az *f(t)* függvény csak olyan tagokból áll, amelyeknek csak véges számú lineárisan független deriváltjuk van. Ez másképpen azt jelenti, hogy e függvények deriváltjai egy idő után vagy arányosak lesznek az eredeti függvénnyel, vagy nullává válnak. Az első feltételnek megfelelő függvények:

$$\alpha\cdot\exp\beta t,\ \alpha\cdot\sin\beta t,\ \alpha\cdot\cos\beta t,\ \alpha\cdot\mathrm{sh}\beta t,\ \alpha\cdot\mathrm{ch}\beta t.$$

Hiperbolikus függvények esetén azok e-ados alakját kell használni. A második feltételnek a polinomok felelnek meg. Természetesen nem csak a felsorolt függvények megfelelőek, hanem tetszőleges lineáris kombinációjuk – azaz szorzataik, és ezek összegei – is. Ha az *f(t)* függvény a fent leírtak szerinti, akkor a partikuláris megoldás hasonló lesz hozzá, azzal a kiegészítéssel, hogy minden olyan deriváltját szerepeltetni kell, amely eltér tőle. Exponenciális függvény esetén nincs ilyen, hiszen ez a függvény arányos a saját deriváltjával, szinusz, vagy koszinusz esetén mindkettőnek szerepelni kell, hiperbolikus függvényeknél az e-adnál leírtak szerint kell eljárni, mivel az e-ados alakjukat kell használni, polinomoknál pedig az összes a legnagyobb kitevőnél kisebb kitevőjű tagot.
Abban az esetben, ha valamelyik tag szerepel a homogén általános megoldásban (rezonancia), ugyan úgy kell eljárni, mintha a homogén megoldásban többszörös gyök lenne, azaz *t* legkisebb még nem szereplő hatványával kell szorozni.

IDÉZET BEZÁRVA

A bonyolultan hangzó idézet jól tükrözi a *Bevezetőben* leírtakat, miszerint a matematikusok ragaszkodnak az analitikus függvények használatához. Ez rendben is volna akkor, ha az újabb matematikai tankönyvek már tartalmaznának a modern (rohanó) világot érdeklő, könnyen számítógépre vihető numerikus megoldási módszereket is. A felhasználónak ugyanis elemi érdeke a megoldási módszerekhez való gyors hozzájutás az éppen aktuális mérnöki, vagy fizikai problémák számítógépes modellezéséhez. A hiábavaló keresgéléseim az Interneten azt mutatják, hogy egyelőre ettől még nagyon messzi vagyunk. Ilyenkor mit tesz a mérnök, vagy fizikus: *Magad uram, ha nincs szolgád*. Pedig a jelen munkában felvetett matematikai probléma megoldása utólagosan végtelenül egyszerű, ezt adom közre mások segítésére is a következőkben:

Az állandó együtthatós differenciálegyenletek megoldásának legegyszerűbb útja az ún. *Laplace transzformációs* módszer. A (3.2) inhomogén differenciálegyenlet Laplace transzformációval algebrai egyenletté alakítható át:

$$(s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2)x(s) = f(s), \tag{3.5}$$

ahol s valós változó. Az (3.5) algebrai egyenlet abban az esetben áll fenn, ha az inga helyzete és sebessége a $t = 0$ időpontban zérus:

$$x(0) = 0;\ \dot{x}(0) = 0. \tag{3.6}$$

Az inga mozgását az $x(t)$ függvény írja le, melynek Laplace transzformáltját az (3.5) egyenletből kapjuk egyszerű osztással:

$$x(s) = \frac{f(s)}{s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2} \equiv f(s)g(s), \tag{3.7}$$

ahol $g(s)$ az (3.5) egyenlet *súlyfüggvénye*, vagy más elnevezéssel *átviteli függvénye:*

$$g(s) = \frac{1}{s^2 + 2\lambda s + \omega_0^2} \equiv \frac{1}{(s+\lambda)^2 + \omega^2}. \tag{3.8}$$

ahol az inga súrlódás miatt csökkent szögsebessége (3.4)-gyel azonos:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2 > 0. \tag{3.9}$$

Az $x(t)$ ingamozgást leíró megoldás az (3.7) egyenlet *inverz Laplace transzformációjával* kapható meg. A Laplace transzformáció elmélete szerint:

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \equiv \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau, \tag{3.10}$$

ahol a $g(t)$ függvény elnevezése: *Green függvény*. A (3.10) integrált a Laplace transzformáció elméletében *konvolúciós* integrálnak nevezik.

A (3.8) súlyfüggvény inverz Laplace transzformáltja szerencsére ismert a Laplace transzformációs táblázatokból:

$$\exp(-\alpha t)\sin\beta t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}, \tag{3.11}$$

melynek ismeretében a *g(s)* súlyfüggvényhez tartozó Green függvény (időfüggvény):

$$g(t) = \frac{1}{\omega}\exp(-\lambda t)\sin\omega t. \tag{3.12}$$

Ennek az inga mozgása *f(t)* gerjesztő erősűrűség függvényében (3.10) szerint:

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^t f(\tau)\exp\left[-\lambda(t-\tau)\right]\sin\omega(t-\tau)d\tau} \tag{3.13}$$

amely csak a (3.6) kezdeti feltételek teljesülése esetén érvényes. A képletben *omega* az inga súrlódás miatt csökkent szögsebessége, *lambda* az inga súrlódási tényezője. Ezek a paraméterek a mérésből többé-kevésbé pontosan meghatározhatók.

Megjegyzem, hogy a kapott eredmény dimenzionálisan is helyes, hiszen az inga *x(t)* kitérésének dimenziója hosszúság, SI-ben méter. Az integrandusban az *f(t)* erősűrűség dimenziója SI-ben m/s^2, azaz gyorsulás. Az időszerinti integrálás kiejti a nevezőben lévő egyik időegységet, az *1 / omega* szorzó pedig kiejti a nevezőben lévő második időegységet is.

4. A numerikus megoldás módszere

A (3.13) integrál, egyszerűsége ellenére, elég ijesztőnek tűnik. A gyakorlati alkalmazásokban diszkrét mintavételi jelekkel foglalkozunk, tehát a (3.13) integrált közelítő összeggel kell helyettesíteni. Szerencsére a kísérleteimben az inga mozgása, illetve a forgó körasztal mozgása szükségszerűen igen lassú, így a másodperces mintavételi idő is elegendő számítási pontosságot biztosít. Az eddigi vizsgálataimban a gerjesztési függvény a gravitációs erősűrűségnek felel meg, amelyet elméleti úton kell úgy meghatározni, hogy a (3.13) képlettel számított ingamozgás „hasonlítson" a mért ingamozgáshoz.
A numerikus integrálás céljából célszerű bevezetni a következő komplex integrált:

$$X(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^t f(\tau)\exp\left[z(t-\tau)\right]d\tau; \ \left(z = i\omega - \lambda\right), \tag{4.1}$$

amelynek a képzetes része azonos a (3.13) megoldással:

$$x(t) = \operatorname{Im} X(t) \equiv \frac{1}{\omega}\int_0^t f(\tau)\exp\left[-\lambda(t-\tau)\right]\sin\omega(t-\tau)d\tau \tag{4.2}$$

A (4.1) integrál egyszerű rekurzióval számítható, ezt igazolom a következőkben.

Írjuk fel a (4.1) integrál közelítését *T* mintavételi idővel:

$$X(N\times T) = \frac{1}{\omega}\int_0^{NT} f(\tau)\exp\left[z(N\times T-\tau)\right]d\tau; \ \left(z = i\omega - \lambda\right) \tag{4.3}$$

Képezem a következő különbséget:

$$X(N+1) - \exp(z)X(N) \cong$$

$$\cong \frac{1}{\omega}\int_0^{N+1} f(\tau)\exp\left[z(N+1-\tau)\right]d\tau - \exp(z)\frac{1}{\omega}\int_0^{N} f(\tau)\exp\left[z(N-\tau)\right]d\tau \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{\omega}\int_0^{N+1} f(\tau)\exp\left[z(N+1-\tau)\right]d\tau - \frac{1}{\omega}\int_0^{N} f(\tau)\exp\left[z(N+1-\tau)\right]d\tau \equiv \tag{4.4}$$

$$\equiv \frac{1}{\omega}\int_N^{N+1} f(\tau)\exp\left[z(N+1-\tau)\right]d\tau \cong \frac{T}{\omega}\times f(N+1)$$

A T mintavételi idő jelölését elhagytam az egyszerű jelölés miatt. A közelítés feltételezi, hogy a gerjesztési erő változása kicsi a T mintavételi időn belül. A megadott közelítés alapján a rekurziós számítás (numerikus eljárás) egyszerűnek adódik:

$$\boxed{\begin{gathered} X\left[(N+1)T\right] \cong X(NT)\times\exp(zT) + \frac{T}{\omega}\times f\left[(N+1)T\right] \\ \exp(zT) \equiv \exp(i\omega-\lambda)T \equiv \\ \equiv \exp(-\lambda)\left(\cos\omega T + i\sin\omega T\right) = const! \end{gathered}} \tag{4.5}$$

Itt T a mintavételi idő, *omega* pedig az inga mérhető körfrekvenciája:

$$\omega = 2\pi / T_p; \quad \left(T_p = az\ inga\ lengésideje\right) \tag{4.6}$$

A kezdeti feltétel fontos, mely biztosítja a (4.5) rekurzió érvényességét:

$$X(t=0) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Re} X(0) = \operatorname{Im} X(0) = 0 \tag{4.7}$$

<u>A gerjesztett inga stacionárius állapotú lengése:</u>

$$\boxed{x(t) \equiv x(N\times T) = \operatorname{Im} X(N\times T); \ \left(N\to\infty\right)} \tag{4.8}$$

A kvázirezonanciás gravitációs mérésnél többek között felmerül egy olyan kellemetlen jelenség, hogy az inga lengési frekvenciája nagy lengésidők esetén erősen függ az inga amplitúdójától. A mérések azt mutatják, hogy az inga lengésideje jó közelítésben arányosan nő a lengési amplitúdóval. A gravitációs gerjesztés fokozatosan energiát visz bele a rendszerbe, ami egyre növeli az inga amplitúdóját, minek következtében az inga „kiesik a szinkronból”, így a gerjesztés az inga kaotikus mozgásához vezet. Ennek elkerülése céljából választottam a gerjesztési periódust az inga lengésidejének többszörösére, amivel sikerült csökkenti a „frekvencia-modulációból” eredő problémát azzal, hogy a gravitációs energia-átadás mértékét csökkentettem. Ezért is neveztem el a mérést kvázirezonancia mérésnek.

A gerjesztett fizikai inga sikeres matematikai modellezése során sokat tanultam, fontos tapasztalatokat szereztem:

- A gravitációs kísérlet modellezése a (3.2) differenciálegyenlettel „első nekifutásra” egyszerűnek tűnt, és csak a modell alkalmazása során jöttek elő a nehézségek, elsősorban az inhomogén differenciálegyenlet numerikus integrálásával kapcsolatban.
- Kiderült, hogy a (3.2) differenciálegyenlet egyszerű számítógépes integrálásához elkerülhetetlenül komplex függvényt (konkrétan *Euler* képletét) kellett alkalmazni. Úgy gondolom, hogy pusztán valós függvényekkel a probléma megoldása lényegesen komplikáltabb lett volna.
- Döbbenetes az, hogy egy egyszerű fizikai probléma, egy rezgő rendszer külső gerjesztésének matematikai modellezéséhez a komplex függvénytan bevonására van szükség. Ez újra alátámasztja a komplex számfogalom (komplex matematika) jelentőségét a természet leírásában, speciálisan a fizikában.
- A kísérletben megjelenő „frekvencia-modulációs” jelenség még tovább bonyolítja a matematikai modellt. További feladatot jelent még a jövőben annak számszerű jellemzése, hogy a modellből következő elméleti ingamozgás mennyire felel meg (mennyire korrelál) a mért ingamozgásnak. A műszaki gyakorlatban ez egy külön tudományág, a „*grafoanalitikus identifikáció*”, amikor egy valóságos fizikai rendszer átviteli függvényét grafikus módszerekkel határozzák meg.

<u>Összefoglalva: az ördög valóban a részletekben van, ezt sosem szabad elfelejtenünk.</u>

5. Rezonancia

A jelen anyag teljessé tétele érdekében röviden ismertetem a mechanikai rezonancia jelenségét, amely szorosan kapcsolódik a fentiekben ismertetett gerjesztett rezgések *(kényszerrezgések*) matematikájához. A rezonancia jelensége azokban az esetekben lép fel, amikor a rezgő rendszer (speciálisan inga) sajátfrekvenciája közelítőleg megegyezik a külső gerjesztő erő frekvenciájával. A rezonancia matematikai modellje a (3.2) speciális esete:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \sin \omega t\,, \tag{5.1}$$

amelynek bizonyíthatóan általános megoldása analitikus:

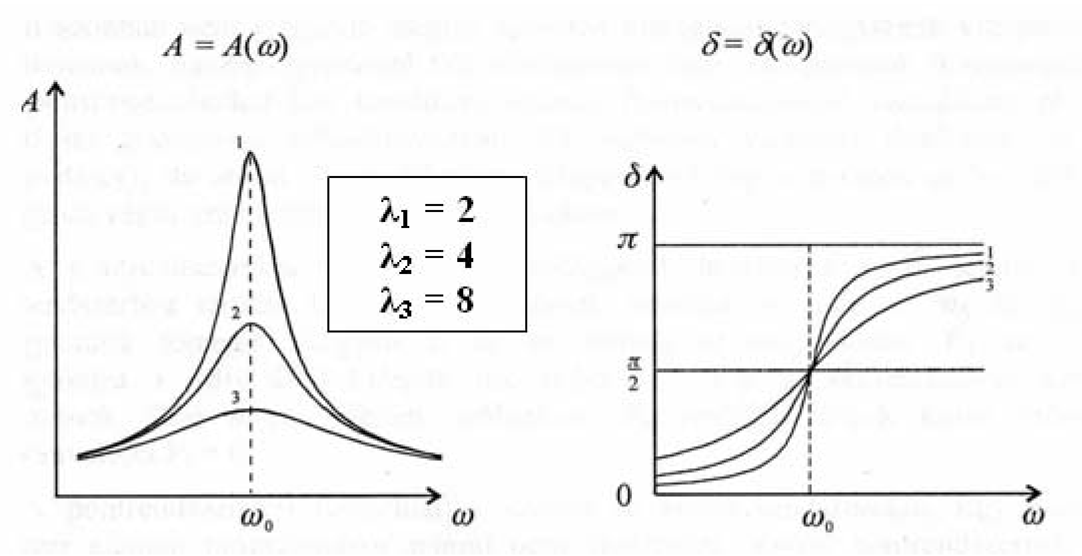
$$x\left(t\right) = A\sin(\omega t - \delta) + Ce^{-\lambda t}\sin(\omega_0 t + \alpha);\quad \lambda < \omega_0\,!. \tag{5.2}$$

A képletben szereplő konstansok az (5.1) másodrendű differenciálegyenlet két független integrációs állandójával fejezhetők ki. Az ω_0 frekvencia a rezgő rendszer (pl.inga) sajátfrekvenciája, ω pedig a gerjesztés frekvenciája. Az (5.2) általános megoldás első tagja az (5.1) inhomogén egyenlet partikuláris megoldása, míg a második tag a homogén rész általános megoldása. Stacionárius állapotban az (5.2) megoldás második tagja a csillapodás miatt eltűnik, tehát az (5.1) differenciálegyenlet stacionárius megoldása:

$$x\left(t\right) = A\sin(\omega t - \delta)\,, \tag{5.3}$$

amely két integrációs állandót tartalmaz:

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\omega^2}};\quad \mathrm{tg}\delta = \frac{2\lambda\omega}{\omega_0^2 - \omega^2};\ \omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2. \tag{5.4}$$



A stacionárius amplitúdót a csillapítás korlátozza. Ha a gerjesztési frekvencia megegyezik az rezgőrendszer (pl. inga) sajátfrekvenciájával, akkor lép fel a *rezonancia* jelensége. Rezonancia esetén a rezgés amplitúdója maximális. A természetben számos rezonancia jelenség előfordul, ennek részleteire itt most nem térek ki. Kiemelendő a „rezonancia-katasztrófa” jelensége, aminek sokszor idézett példája egy híd „leszakadása” az USÁ-ban, 1940-ben, amelyet egy erős szélvihar által keltett rezonancia okozott (*Tacoma Narrows Bridge*).
A részletekről itt olvashatunk:

http://en.wikipedia.org/wiki/Tacoma_Narrows_Bridge

A δ *fázistolásnak* fontos fizikai jelentése van, amely ugyancsak függ a gerjesztés frekvenciájától. A fizikai kép alapján természetes, hogy a gerjesztett fizikai rendszer rezgési (lengési) fázisa mindig késik a gerjesztő erő fázisához képest. Az elméleti számításokat a gyakorlat is igazolja: a kényszerrezgés δ fáziskésése kis ω-nál közel nulla, rezonancia esetén pontosan $\pi/2$, majd ω növekedésével π felé tart.

A rezonancia-katasztrófa jelensége mögött egyszerű fizikai tartalom húzódik meg, ugyanis rezonancia esetén a gerjesztés időben állandó energiát táplál be a rezgő rendszerbe. A rezgő rendszer $\pi/2$ fáziskéséssel követi a gerjesztő erőt:

$$\begin{gathered} f(t) = f_0 \sin \omega t \equiv f_0 \sin \omega_0 t \\ x(t) = A \sin\left(\omega_0 t - \pi/2\right) \equiv -A \cos \omega_0 t \\ \dot{x}(t) = v(t) = A\omega_0 \sin \omega_0 t \end{gathered} \tag{5.5}$$

A gerjesztő erő iránya minden pillanatban megegyezik a rezgő rendszer sebességének irányával, ami a rezgő rendszer folyamatos energianövelését okozza. A rezgő rendszerbe folyamatosan bevitt teljesítmény:

$$P \sim f(t) \times v(t) = A f_0 \omega_0 \sin^2 \omega_0 t\,. \tag{5.6}$$

A rezgő rendszer energiáját a λ csillapítás korlátozza, a bevitt energia disszipálódik (hővé alakul). Ha a λ csillapítás kicsi, ekkor a rezgő rendszer energiája folyamatosan növekszik, ami rezonancia-katasztrófához vezet.