Capítulo 6

Lugar de las raíces

La respuesta transitoria de un sistema en lazo cerrado, está ligada con la ubicación de los polos de lazo cerrado en el plano complejo S. Si el sistema tiene una ganancia variable, los polos de lazo cerrado dependen del valor de la ganancia elegida. El método del lugar de las raíces nos da una idea de como se desplazan los polos de lazo cerrado en el plano S al variar la ganancia.

6.1. Condición de magnitud y ángulo

En la figura 1 se ilustra un sistema típico de control retroalimentado en lazo cerrado. La función de transferencia de lazo cerrado es

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{kG(s)}{1 + kG(s)H(s)} \tag{6.1}$$

La ecuación característica para este sistema de lazo cerrado se obtiene al igualar a cero el denominador de la función de transferencia de lazo cerrado, es decir

$$1 + kG(s)H(s) = 0$$

o bien

$$kG(s)H(s) = -1 \tag{6.2}$$

La respuesta transitoria y la estabilidad del sistema dependen de los polos de la función de transferencia de lazo cerrado, los cuáles no se conocen de forma inmediata ya que ellos cambian con las variaciones de k, por lo que no tenemos conocimiento del desempeño del sistema, a menos que factoricemos los valores específicos de k del denominador. El lugar geométrico de las raíces se utilizará para darnos una clara imagen de los polos de lazo cerrado cuando k varía.

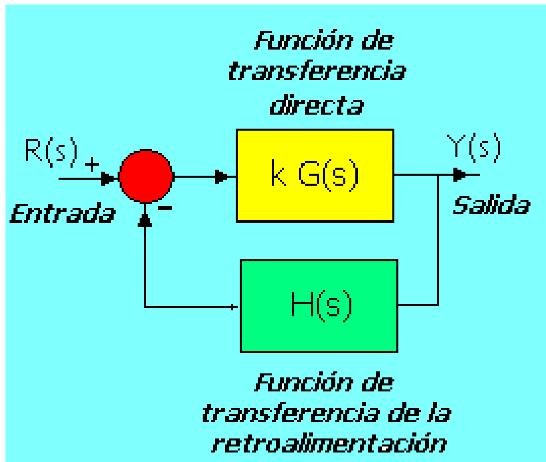


Fig. 1 Sistema en lazo cerrado

La ecuación (6.2) es una cantidad compleja, por lo que se puede dividir en dos ecuaciones para obtener:

Condición de ángulo:

$$\angle G(s)H(s) = \pm 180^o(2k+1) \qquad (k = 0, 1, 2, ...) \tag{6.3}$$

Condición de magnitud, amplitud o módulo

$$|G(s)H(s)| = 1 \tag{6.4}$$

Los valores de s que cumplen las condiciones de ángulo y magnitud, son las raíces de la ecuación característica o polos de lazo cerrado. El diagrama de los puntos del plano complejo que sólo satisfacen la condición de ángulo, constituye el *Lugar de las Raíces.*

6.2. Reglas para el trazado del lugar de las raíces

1. Obtener la ecuación característica de tal forma que el parámetro de interés aparezca como factor multiplicativo de la forma

$$1 + K\frac{(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)} = 0$$

2. Ubicar los polos y ceros de lazo abierto en el plano complejo S y trazar el lugar de las raices sobre el eje real

   a) Los polos siempre siguen a los ceros

   b) El lugar de las raíces es simétrico con respecto al eje real

c) El número de polos es igual al número de ceros

3. Determinar las asintotas del lugar de las raíces, su intersección con el eje real y el ángulo entre ellas

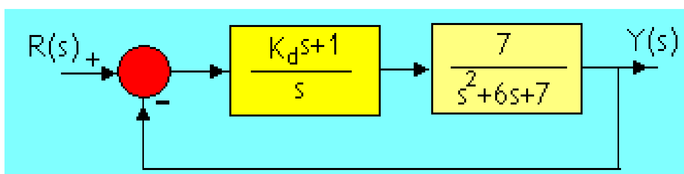
4. Determinar los puntos de ruptura de partida y de llegada

5. Hallar los ángulos de partida (ó angulos de llegada) del lugar de las raíces desde los polos complejos (o ceros complejos)

6. Determinar el valor de K para el cual el lugar de las raíces cruza el eje imaginario

6.3. Obtención detallada del lugar de las raíces

Exercise 64 *Considérese un sistema de control mostrado en la siguiente figura. Trace el gráfico del lugar de las raíces para* $K_d \geq 0$. *Encuentre el valor de* K_d *(si es que existe), tal que se tengan los polos dominantes con* $\xi = 0{,}7071$ *y* $t_s = 4{,}3668 seg$. *Justifique cualquiera que sea su respuesta*



Solution 65 1. *De acuerdo a la regla 1, se debe reescribir el polinomio característico en el formato especifícado*

$$1 + \frac{7\,(1 + K_d s)}{s\,(s^2 + 6s + 7)} = 0$$

$$s^3 + 6s^2 + 7s + 7 + 7K_d s = 0 \tag{6.5}$$

Agrupando esta última expresión

$$\left(s^3 + 6s^2 + 7s + 7\right) + 7K_d s = 0$$

y dividiendo el polinomio por $s^3 + 6s^2 + 7s + 7$, *se obtiene el polinomio característico en el formato especifícado*

$$1 + K_d \frac{7s}{s^3 + 6s^2 + 7s + 7} = 0$$

2. *Se obtiene los polos y los ceros de la función de transferencia de lazo abierto*

$$G(s)H(s) = K \frac{s}{s^3 + 6s^2 + 7s + 7}$$

donde $K = 7K_d$ y la ubicación de los polos y ceros son:

polos	*ceros*
$-4{,}8552$ $-0{,}5724 \pm 1{,}0555i$	0

3. *El número de asíntotas es igual al numero de ceros al infinito, es decir, la diferencia entre los polos y ceros de la función de transferencia de lazo abierto, en este caso existen 2 ceros al infinito. La intersección de las asíntotas con el eje real es obtenida de la fórmula*

$$\sigma_a = \frac{\sum polos - \sum ceros}{\#polos - \#ceros}$$

donde #polos y #ceros son el número de polos y ceros de lazo abierto respectivamente, $\sum polos$ y $\sum ceros$ son la ubicación de los polos y ceros de lazo abierto en el plano complejo S, respectivamente. Al aplicar la fórmula se tiene

$$\sigma_a = \frac{-4{,}8552 - 0{,}5724 - 0{,}5724 - 0}{3 - 1} = -3$$

El ángulo entre las asíntotas es obtenida de la fórmula

$$\angle As\acute{\imath}ntotas = \frac{\pm 180^o(2n+1)}{\#polos - \#ceros}, \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

En este caso, el ángulo de las asíntotas son para $k = 0$ y 1, $\angle 90$ y $\angle 270$ respectivamente

4. *Puntos de ruptura de llegada y partida, también conocidos como puntos silla de entrada y salida, se encuentran sobre el eje real o se producen en pares complejos conjugados. Si hay lugar de las raíces entre dos polos de lazo abierto adyacentes sobre el eje real, entonces hay punto de ruptura. En forma similar, si hay lugar de las raíces entre dos ceros adyacentes sobre el eje real, entonces hay punto de ruptura entre los dos ceros.*

   a) *Puntos de ruptura por medio de derivación.*
   Se reescribe la ecuación característica como

$$B(s) + kA(s) = 0$$

   Los puntos de ruptura se pueden determinar de las raíces de

$$\frac{dk}{ds} = 0 \tag{6.6}$$

   Si una raíz de la ecuación (6.6) cae sobre el lugar de las raíces sobre el eje real, se trata de un punto de ruptura, en caso de la raíz no se encuentre. Para este caso en particular

$$k = -\frac{s^3 + 6s^2 + 7s + 7}{s}$$

$$\frac{dk}{ds} = -\frac{s\left(3s^2+12s+7\right)-\left(s^3+6s^2+7s+7\right)}{s^2} = 0$$

$$2s^3+6s^2-7=0$$

al determinar las raíces, éstas son

$$\begin{aligned} s_1 &= -2{,}38 \\ s_2 &= -1{,}55 \\ s_3 &= 0{,}94 \end{aligned}$$

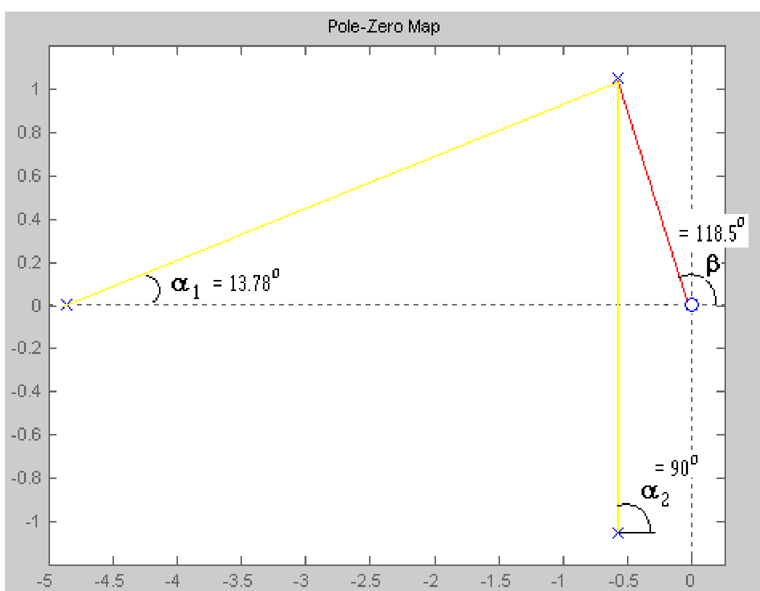
Las raíces que se encuentran sobre el lugar de las raíces, son puntos de ruptura, en este caso son $s_1 = -2{,}38$ *y* $s_2 = -1{,}55$

5. *Determinar los ángulos de partida (ó angulos de llegada) del lugar de las raíces desde los polos complejos (o ceros complejos)*

   a) *Angulo de partida desde un polo complejo* $= 180^o -$ (*suma de los ángulos de los vectores al polo complejo en cuestión desde los otros polos*) $+$ (*suma de los ángulos de los vectores al polo complejo en cuestión desde los ceros*)

   b) *Angulo de llegada hacia un cero complejo* $= 180^o -$ (*suma de los ángulos de los vectores al cero complejo en cuestión desde los otros ceros*) $+$ (*suma de los ángulos de los vectores al cero complejo en cuestión desde los polos*)

   - *El ángulo de partida de nuestro polo complejo conjugado, ubicado en* $s = -0{,}5724 + 1{,}0555i$ *es igual a* $180^o - (\alpha_1 + \alpha_2) + \beta = 180^o - (90^o + 13{,}78^o) + 118{,}5^o = 194{,}72^o$. *El ángulo de partida del polo de lazo abierto en* $s = -0{,}5724 - 1{,}0555i$ *es* $-194{,}72^o$



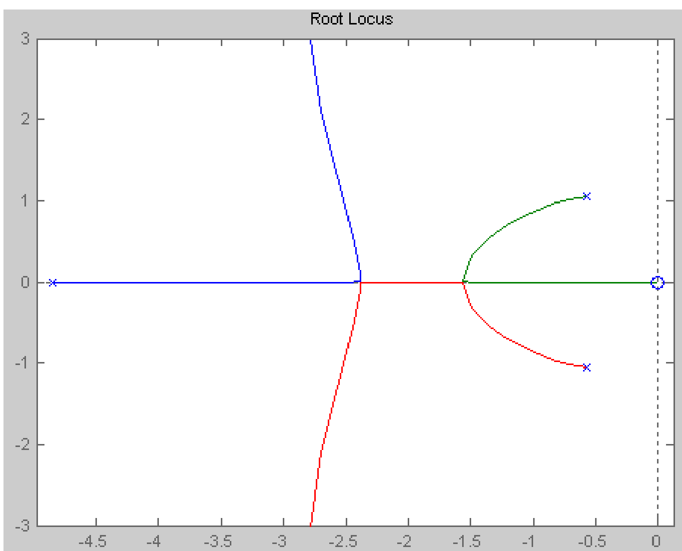
6. *Determinar el valor de K para el cual el lugar de las raíces cruza el eje imaginario. A partir del polinomio característico (6.5), se aplica el criterio de Routh para verificar el rango de estabilidad*

$$\begin{aligned} s^3 + 6s^2 + 7s + 7 + 7K_d s &= 0 \\ s^3 + 6s^2 + 7(1 + K_d)s + 7 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll} s^3 & 1 & 7(1+K_d) \\ s^2 & 6 & 7 \\ s^1 & \frac{35+42K_d}{6} & \\ s^0 & 7 & \end{array}$$

De la tercera fila $35 + 42K_d > 0 \rightarrow K_d > -0{,}833$, lo cual implica que el lugar de las raíces no cruza el eje imaginario para toda $K_d \geq 0$.

7. *El lugar de las raíces se muestra en la siguiente figura, a partir de él se busca determinar el valor de K_d (si es que existe), tal que se tengan los polos dominantes en $\xi = 0{,}7071$ y con un tiempo de establecimiento $t_s = 4{,}3668 seg$*



De la condición de tiempo de establecimiento $t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = 4{,}3668 \rightarrow \xi\omega_n = 0{,}916$ y de la condición de $\xi = 0{,}7071$, se puede obtener la ubicación del polo que cumple con ambas especificaciones

$$s_d = -0{,}916 \pm j0{,}916$$

Si existe el valor de K_d tal que los polos dominantes sean s_d se debe verificar si se satisface la condición de ángulo

$$\angle\, K \frac{s}{s^3 + 6s^2 + 7s + 7}\bigg|_{s_d} = 180^o \tag{6.7}$$

Sustituyendo el valor del polo deseado s_d en la ecuación (6.7) se obtiene

$$\angle\left(-0{,}4316 + 0{,}0006i\right)K| = 180^o$$

y la $tg^{-1}(\frac{0{,}0006}{-0{,}4316}) = 180^o$*La ganancia K no afecta en el ángulo por lo que se satisface la condición de ángulo. Para determinar el valor de K_d se utiliza la condición de magnitud*

$$\begin{aligned} |\left(-0{,}4316 + 0{,}0006i\right)K| &= |0{,}4316K| = 1 \\ K &= 2{,}13 \rightarrow K_d = 0{,}3 \end{aligned}$$