Capítulo 4

Respuesta transitoria

Una ves que los diagramas a bloques son desarrollados, el siguiente paso es llevar a cabo el análisis de los sistemas. Existen dos tipos de análisis: cuantitativo y cualitativo. En el análisis cuantitativo, el interés es obtener la respuesta exacta de los sistemas de control debido a una señal de excitación especifica. En el análisis cualitativo, nos interesa las propiedades generales de los sistemas de control. En este capítulo se investiga el análisis cuantitativo.

4.1. Sistemas de primer orden

Un sistema de primer orden sin ceros puede ser descrito por la función de transferencia que se muestra en la figura (4.1.a), en la figura (b) se muestra la ubicación del polo en el plano complejo S. A continuación se mostrará la relación que existe entre la respuesta del sistema y la ubicación de los polos en el plano complejo de los sistemas de primer orden.

4.1.1. Respuesta al escalón unitario

Si la entrada es un escalón unitario, donde $R(s) = \frac{1}{s}$, la transformada de Laplace de la respuesta al escalón es

$$Y(s) = \frac{k}{\tau s + 1}\frac{1}{s}$$

la respuesta al escalón se obtiene al tomar la transformada inversa de $Y(s)$

$$y(t) = k\left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t}\right) \tag{4.1}$$

donde k y τ son la ganancia del sistema y la constante de tiempo respectivamente.

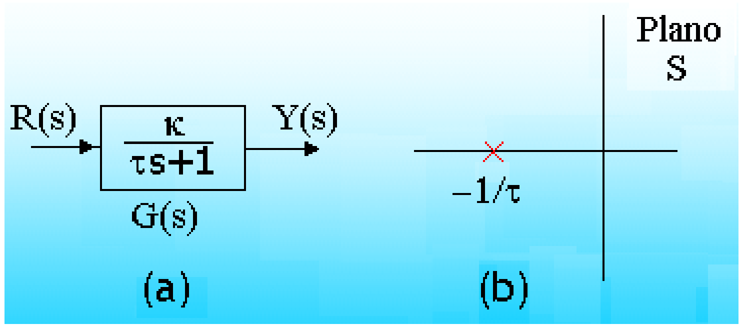


Figura 4.1 (a) Sistema de primer orden (b) Ubicacin de polos

La ecuación (4.1) está graficada en la figura 4.2

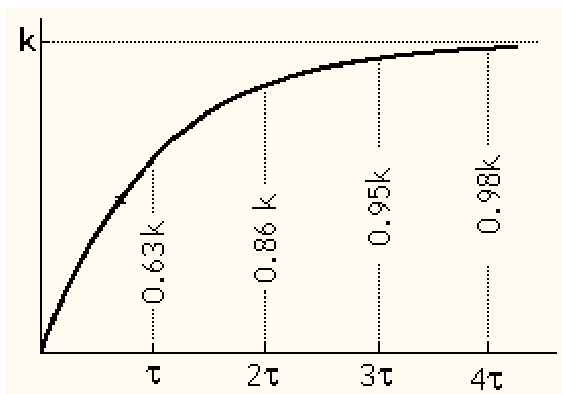


Figura 4.2 Respuesta del sistema

Constante de tiempo

El término τ se denomina *constante de tiempo* de la respuesta. De la ecuación (4.1), la constante de tiempo es el tiempo que toma la respuesta al escalón para alcanzar el 63 % de su valor final (figura 4.1b). Como la derivada de $e^{-\frac{1}{\tau}t}$ es $-\frac{1}{\tau}$ cuando $t = 0$, τ es la rapidez de cambio inicial de la exponencial en $t = 0$. En consecuencia, la constante de tiempo se puede considerar una especificación de la respuesta transitoria para un sistema de primer orden, puesto que se relaciona con la velocidad a la que el sistema responde a una entrada escalón.

También se puede evaluar la constante de tiempo a partir de la gráfica del polo (figura 4.1b). Como el polo de la función de transferencia está en $-\frac{1}{\tau}$, podemos decir que el recíproco de la ubicación del polo es la constante de tiempo, y cuanto más alejado se encuentre el polo del eje imaginario, más rápida es la respuesta transitoria.

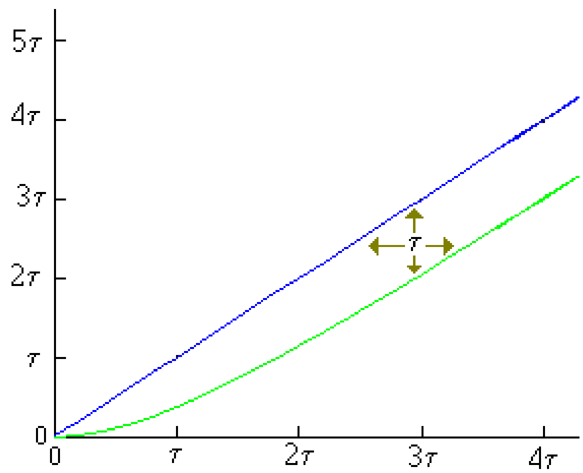
4.1.2. Respuesta a la rampa

La respuesta de un sistema de primer orden representado por su función de transferencia

$$G(s) = \frac{k}{\tau s + 1}$$

ante una rampa unitaria $r(t) = t$, es

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{k}{\tau s + 1}\frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2} - \frac{\tau}{s} + \frac{\tau^2}{\tau s + 1} \\ y(t) &= t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$



Respuesta a la rampa unitaria

La señal de error

$$\begin{aligned} e(t) &= r(t) - y(t) \\ &= \tau - \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$

cuando $t \to \infty$, $e^{-\frac{t}{\tau}} \to 0$, y la señal de error $e(t)$ se aproxima a τ, es decir

$$e(\infty) = \tau$$

El error entre la señal de entrada y la señal de salida ante una rampa unitaria en un instante de tiempo suficientemente grande t es igual a la constante de tiempo τ. Entre más pequeña sea la constante de tiempo, el error de seguimiento es menor.

4.1.3. Respuesta al impulso

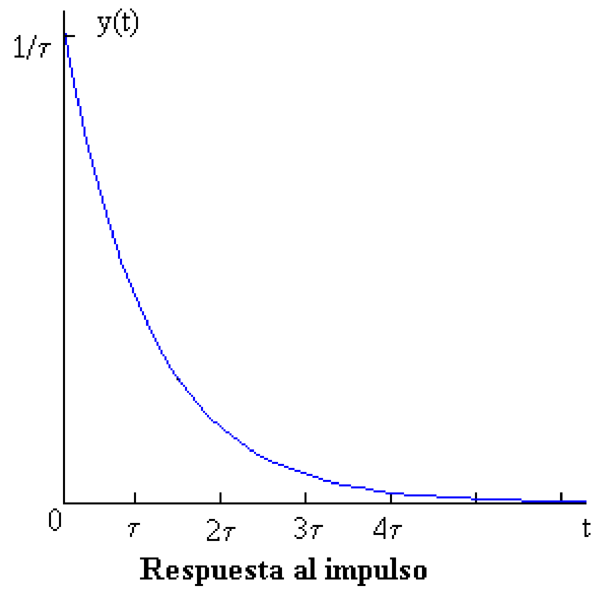
Para una entrada impulso unitario $\delta(t)$, la salida del sistema es

$$Y(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \tag{4.2}$$

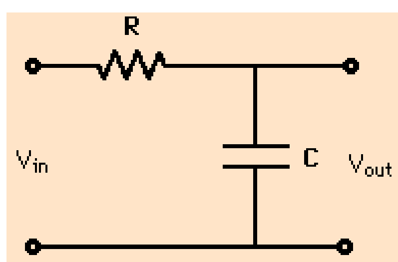
La transformada inversa de la ecuación (4.2) es dado por

$$y(t) = \frac{1}{\tau} e^{\frac{-t}{\tau}} \tag{4.3}$$

La curva de respuesta de la ecuación (4.3) es mostrado en la siguiente figura

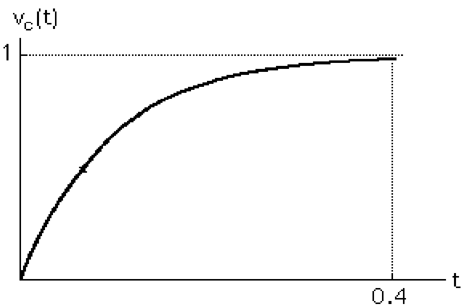


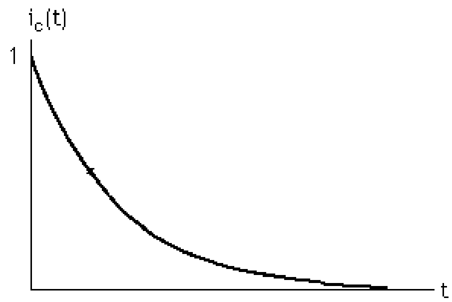
Example 43 *Considérese el circuito RC mostrado en la siguiente figura*



Si la entrada $v(t)$ es un escalón unitario con las respuestas de $i(t)$ y $v_c(t)$

mostradas en las figuras





Determine los valores del capacitor C y de la resistencia R.

Solution 44 *Aplicando la ley de los voltajes*

$$v_c(t) + v_R(t) = v_{in}(t) \tag{4.4}$$

utilizando las relaciones

$$v_R(t) = Ri(t) \qquad v_c(t) = \frac{1}{C}\int i_c(t)dt \qquad i_c = C\frac{dv_c}{dt} \tag{4.5}$$

y sustituyendo en (4.4), se obtiene

$$RC\frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = v_{in}(t)$$

La función de transferencia es

$$\frac{V_c(s)}{V_{in}(s)} = \frac{1}{RCs+1} \tag{4.6}$$

de aquí que $4\tau = 4RC = 0{,}4 \to RC = 0{,}1$. De la relación de v_c e i_c se tiene que

$$I_c(s) = CsV_{c(s)}$$

por lo que la ecuación (4.6) se puede reescribir como

$$\frac{I_c(s)}{V_{in}(s)} = \frac{Cs}{RCs+1}$$

como la señal de entrada es un escalón unitario

$$\begin{array}{c} I_c(s) = \frac{Cs}{RCs+1}\frac{1}{s} = \frac{1}{R}\frac{1}{s+\frac{1}{RC}} \\ i_c(t) = \frac{1}{R}e^{-\frac{t}{RC}} \end{array}$$

Si $i_c(0) = 1 \to \frac{1}{R} = 1$, por lo tanto $R = 1$ y $C = 0{,}1$

4.2. Sistemas de segundo orden

A diferencia de los sistemas de primer orden, un sistema de segundo orden tiene una amplia variedad de respuestas que dependen de dos parametros: El factor de amortiguamiento ξ y la frecuencia natural no amortiguada ω_n. El producto $\xi\omega_n$ se le conoce como atenuación del sistema (σ).

La forma standar de un sistema de segundo orden es:

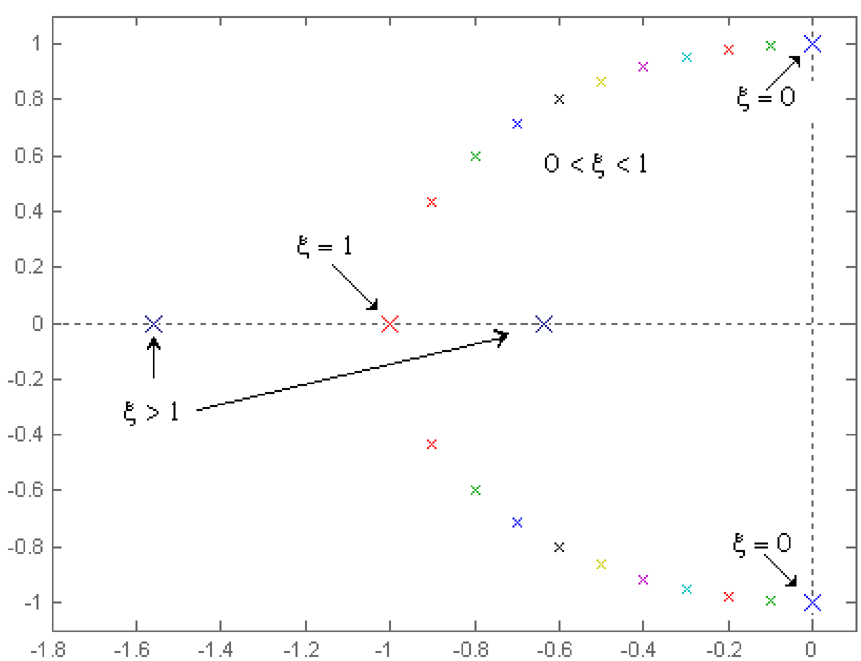
$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

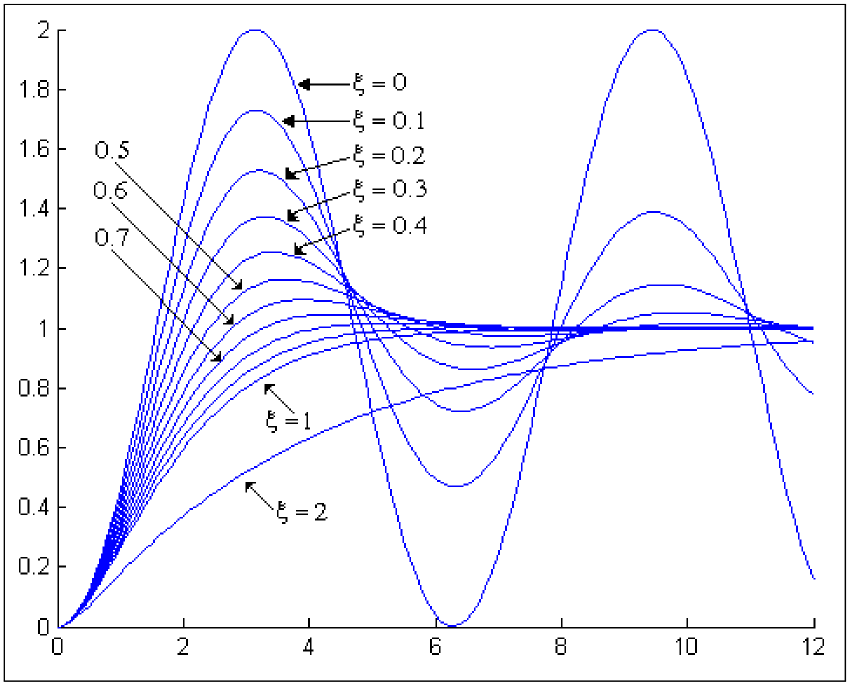
En esta sección se estudiará la respuesta al escalón unitario:

La función de transferencia tiene dos polos y no tiene ceros. Sus polos son

$$-\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

En la figura () se muestran la ubicación de los polos y su correspondiente respuesta al escalón unitario, en la simulación digital se considero que $\omega_n = 1$.





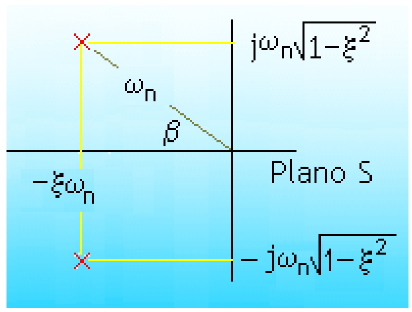
El comportamiento dinámico del sistema de segundo orden puede ser descrito en términos del factor de amortiguamiento ξ

1. Si $\xi = 0$, los polos son imaginarios conjugados, el sistema se denomina criticamente estable y la respuesta presenta oscilaciones sostenidas
2. Si $0 < \xi < 1$, los polos son complejos y conjugados y se dice que el sistema es sub-amortiguado.
3. Si $\xi = 1$, los polos son reales y repetidos y el sistema se denomina criticamente amortiguado
4. Si $\xi > 1$, los polos son reales y distintos y el sistema se denomina sobreamortiguado

4.2.1. Sistemas subamortiguados

Las características deseadas del comportamiento de un sistemas de segundo orden, pueden especificarse en función de la respuesta transitoria ante una entrada escalón. A continuación se describirá algunas de las características de los sistemas de segundo orden subamortiguados con la ubicación de los polos en el plano complejo S.

El patrón de polos para un sistema subamortiguado de segundo orden, se muestra en la siguiente figura:



Del teorema de Pitágoras vemos que la distancia radial del origen al polo es la frecuencia natural no amortiguada ω_n, y el $\cos\beta = \xi$. las cantidades siguientes describen el comportamiento del sistema de segundo orden:

Definition 45 *Tiempo de subida t_r. Tiempo que tarda la respuesta en alcanzar por primera vez la señal de referencia*

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} \tag{4.7}$$

Definition 46 *Tiempo pico t_p. Tiempo que necesita la respuesta del sistema para alcanzar el máximo sobrepaso o sobreimpulso (overshoot)*

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi}{\omega_d} \tag{4.8}$$

Esta ecuación muestra que el t_p es inversamente proporcional a la parte imaginaria del polo. Como las líneas horizontales sobre el plano S son líneas de valor imaginario constante, también son líneas de tiempo pico constante.

Definition 47 *Tiempo de establecimiento t_s. Es el tiempo necesario para que la respuesta alcance y permanezca dentro de un porcentaje (generalmente del 2 %) del error alrededor del valor final*

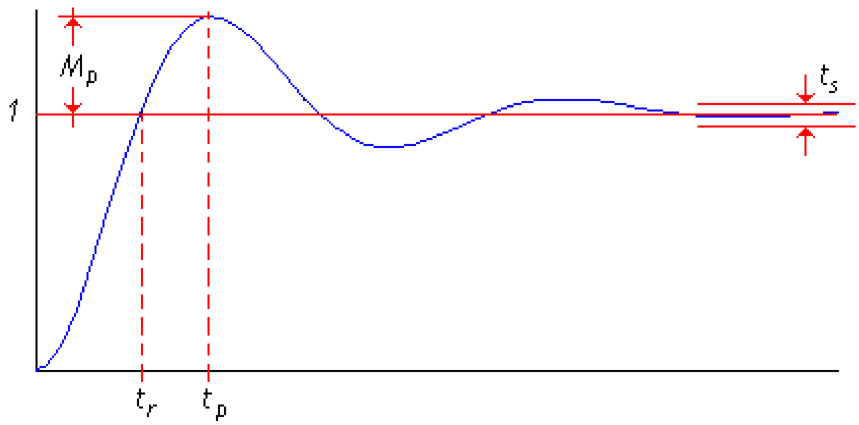
$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} \tag{4.9}$$

Esta ecuación nos dice que el tiempo de establecimiento es inversamente proporcional a la parte real del polo. Como las líneas verticales sobre el plano S son líneas de valor real constante, también son líneas de establecimiento constante.

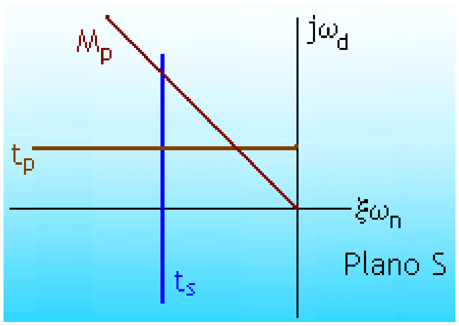
Definition 48 *Máximo sobreimpulso M_p. Es la magnitud del primer sobrepaso el cual ocurre en el tiempo pico, medido desde la señal de referencia. Si la señal de referencia no es un escalón unitario, el máximo sobreimpulso se expresa en porcentaje*

$$\begin{aligned} M_p &= e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \\ M_p &= e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\,\% \end{aligned} \tag{4.10}$$

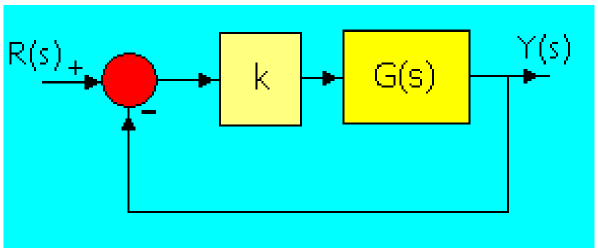
El máximo sobreimpulso depende del factor de amortiguamiento ξ, como $\xi = \cos\beta$ las líneas radiales son líneas de ξ constantes. Como el sobreimpulso es una función de ξ las líneas radiales son entonces líneas de sobrepaso en porcentaje.



La representación geométrica de los conceptos anteriores se ilustran en la siguiente figura



Example 49 *Considere el siguiente sistema de control en lazo cerrado*



donde $G(s) = \frac{1}{s(s+p)}$. Determine los valores de k y p de tal forma que la respuesta transitoria tenga las siguientes característacas: $t_s < 4seg$, $t_p < 1seg$ y $M_p < 10\,\%$. Considere que la señal de entrada es un escalón unitario.

Solution 50 *De la fórmula de tiempo de establecimiento (4.9) se obtiene que*

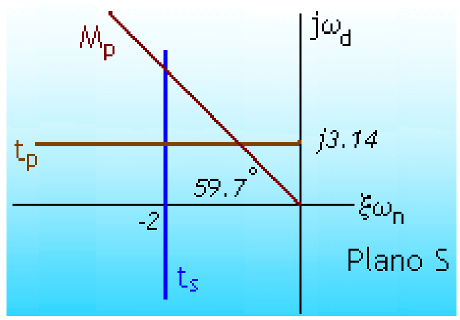
$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} < 2 \rightarrow \xi\omega_n > 2 \rightarrow -\xi\omega_n < -2$$

De la condición de tiempo pico (4.8) se tiene que

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} < 1 \rightarrow \omega_d > \pi$$

Finalmente, de la condición de Máximi sobreimpulso (4.10)

$$\begin{aligned} M_p &= e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} < 0{,}1 \\ \xi &> 0{,}59 \rightarrow \beta < 59{,}76^o \end{aligned}$$



A continuación se elige un polo que se encuentre en la intersección de las líneas trazadas, por ejemplo $s_d = -4 \pm 4j$, en este caso el polinomio deseado es

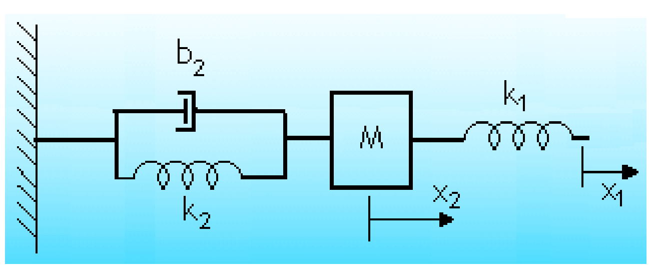
$$(s + 4 + 4j)(s + 4 - 4j) = s^2 + 8s + 32 = 0$$

igualando coeficientes con el polinomio característico del sistema

$$s^2 + ps + k = 0$$

se tiene que $k = 32$ y $p = 8$.

Example 51 *Considere el siguiente sistema mecánico con $K_1 = 2$, $K_2 = 1$, $b_2 = 0{,}5$ y $M_2 = 4$. Se sabe por información de provedor que el resorte K_2 se rompe si este se estira por arriba de una distancia de 3 (adimensional) ¿Si la señalde entrada es $x_1(t) = 4u(t)$ se romperá el resorte K_2?*



Solution 52 *Modelo matemático*

$$
\begin{aligned}
k_1(x_2 - x_1) &= M\ddot{x}_2 + b_2\dot{x}_2 + k_2x_2 \\
x_1 &= \frac{M}{k_1}\ddot{x}_2 + \frac{b_2}{k_1}\dot{x}_2 + \left(\frac{k_2}{k_1} + 1\right)x_2 \\
\frac{X_2(s)}{X_1(s)} &= \frac{1}{\frac{M}{k_1}s^2 + \frac{b_2}{k_1}s + \left(\frac{k_2}{k_1} + 1\right)} = \frac{1}{2s^2 + \frac{1}{4}s + \left(\frac{1}{2} + 1\right)} \\
\frac{X_2(s)}{X_1(s)} &= \frac{1}{2s^2 + 0{,}25s + 1{,}5}
\end{aligned}
$$

$$
X_2(s) = \frac{\frac{1}{2}}{s^2 + 0{,}125s + 0{,}75}\frac{4}{s}
$$

Ganancia $= 0{,}666$, *2*$\xi\omega_n = 0{,}125$, $\omega_n^2 = 0{,}75$, $\omega_n = 0{,}866$, $\xi = 0{,}072$, $M_p = 0{,}79\,\%$ *Resp=4.77*

Capítulo 5

Estabilidad

El problema más importante en los Sistemas de Control conciernen a la estabilidad. Se dice que un sistema es estable si toda entrada acotada produce una salida acotada. A este enunciado se le da el nombre de estabilidad de entrada acotada-salida acotada (*BIBO* bounded input, bounded output).

Una función $r(t)$ definida para $t \geq 0$, se dice que es acotada si su magnitud no se aproxima a infinito, o equivalentemente, existe una constante M tal que

$$|r(t)| \leq M < \infty$$

para todo $t \geq 0$

Definition 53 *Un sistema es estable si cada entrada acotada excita una salida acotada. De otra forma el sistema es inestable*

Example 54 *Considere un sistema con función de trasnferencia $G(s) = \frac{1}{s}$. Si aplicamos la entrada acotada $r(t) = sen(\omega t)$ ¿La salida será acotada?*

Solution 55 $Y(s) = \frac{1}{s}\frac{\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+\omega^2}$
$y(t) = u(t) - \cos(\omega t)$. *La salida debido a la entrada acotada $r(t) = sen(\omega t)$ es acotada, pero no podemos concluir la estabilidad del sistema debido a que se tiene que verificar todas las posibles entradas acotadas. De hecho, el sistema no es estable por que la aplicación de $r(t) = 1$ se tiene $y(t) = t$, entonces la entrada acotada produce una salida no acotada y el sistema no es estable.*

La inestabilidad de un sistema puede ser deducido de la definición 53, al encontrar una entrada acotada que excite una salida no acotada. Sin embargo, es dificil deducir la estabilidad de un sistema debido a existen una infinidad de entradas acotadas que deben ser verificadas. Por fortuna se tiene el siguiente teorema [2]

Theorem 56 *Un sistema con una función de transferencia racional propia $G(s)$ es estable si y solo si todos los polos de $G(s)$ tienen parte real negativa, o equivalentemente, se encuentran en el semiplano izquierdo del plano complejo S*

Por semiplano izquierdo, significa el semiplano izquierdo excluyendo el eje imaginario. El teorema implica que un sistema es inestable si la función de transferencia tiene uno o más polos con parte real positiva o cero. La estabilidad de un sistema, depende solo de los polos de la función de transferencia $G(s)$ y no de los ceros de $G(s)$.

5.1. Criterio de Routh

Considere un sistema con función de transferencia

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

se asume que $N(s)$ y $D(s)$ no tienen factores comúnes. Para determinar la estabilidad de $G(s)$ utilizando el teorema 56, se debe determinar los polos de $G(s)$ o, equivalentemente, las raíces de $D(s)$. Si el grado de $D(s)$ es grande, los cálculos de las raíces (sin el uso de calculadoras) es complicado, por lo que es deseable tener un método para determinar la estabilidad sin calcular las raíces. Este método se denomina criterio de Routh ó criterio de Routh-Hurwitz.

Definition 57 *Un polinomio con coeficientes reales es llamado polinomio Hurwitz si todas las raíces tienen parte real negativa.*

El procedimiento del criterio de estabilidad de Routh es como sigue:

El polinomio denominador de $G(s)$ se escribe de la siguiente forma:

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0 \tag{5.1}$$

la condición necesaria pero no suficiente para estabilidad, es que todos los coeficientes de la ecuación (5.1) estén presentes, y que todos tengan signo positivo.

Example 58 *Verifique si los siguientes polinomios son Hurwitz:*

1. $s^4 + 2s^3 + 3s + 4 = 0$ *Este polinomio no es Hurwitz ya que no todos los coeficientes existen, en particular el coeficiente de la* s^2

2. $s^4 + 2s^3 + 3s^2 - 4s + 10 = 0$ *En este polinomio todos los coeficientes existen pero no todos son positivos, por lo que el polinomio no es Hurwitz*

3. $s^3 + 10s^2 + s + 2 = 0$ *En este polinomio se cumplen las condiciones necesarias, es decir todos los coeficientes existen y todos son positivos, pero esto no es* ***suficiente*** *para garantizar la estabilidad*

Si se cumple la condición necesaria, entonces, se realiza el siguiente esquema:

$$\begin{array}{llllll}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\
s^{n-3} & & & & & \cdots \\
s^{n-4} & & & & & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \\
s^2 & e_1 & e_2 & & & \\
s^1 & f_1 & & & & \\
s^0 & g_1 & & & &
\end{array}$$

Los coeficientes b_1, b_2, b_3, etc., se evalúan de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
b_1 &= -\frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}}{a_1} \\
b_1 &= -\frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}}{a_1} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

la condición necesaria y suficiente para que todas las raíces de la ecuación (5.1) queden en el semiplano izquierdo del plano s, es que todos los coeficientes de la ecuación (5.1) sean positivos y que todos los términos de la primera columna del conjunto sean positivos.

Example 59 *Verifique si el siguiente polinomio es Hurwitz*

$$s^3 + 10s^2 + s + 2 = 0$$

$$\begin{array}{lll}
s^3 & 1 & 1 \\
s^2 & 10 & 2 \\
s^1 & \frac{-2+10}{10} = \frac{8}{10} & \\
s^0 & 2 &
\end{array}$$

Debido a que la primer columna del arreglo son valores mayores que cero, el sistema es estable.

Example 60 *Verifique si el siguiente polinomio es Hurwitz*

5.1.1. Casos especiales.

Pueden presentarse dos casos especiales:

1. El arreglo de Routh tiene un cero sólo en la primera columna del renglón
2. El arreglo de Routh tiene todo un renglón formado por ceros

Cero sólo en la primera columna.

Si un término de la primera columna en cualquier fila es cero, pero los términos restantes no son cero, o no hay más términos, se asigna un número muy pequeño positivo ε para substituir el cero de la primera columna

Example 61

$$s^4 + 2s^3 + s^2 + 2s + 1 = 0$$

$$\begin{array}{lccc} s^4 & 1 & 1 & 1 \\ s^3 & 2 & 2 & \\ s^2 & 0 \approx \varepsilon & 1 & \\ s^1 & 2 - \frac{2}{\varepsilon} & & \\ s^0 & 1 & & \end{array}$$

Si el signo del coeficiente arriba del cero (ε) es el mismo que esta debajo de él, indica que existe un par de raíces imaginarias. Sin embargo, si el signo del coeficiente arriba del cero (ε) es opuesto al que esta debajo de él, esto indica que hay un cambio de signo. Note que en este caso existen dos cambios de signo.

Renglón de ceros

Si todos los coeficientes en cualquier fila son ceros, esto indica que existen raíces de igual magnitud radialmente opuestas en el plano S, esto es, dos raíces reales con la misma magnitud pero signos opuestos y/o dos raíces imaginarias conjugadas. Para resolver este problema se utiliza un polinomio auxiliar formado con los coeficientes de la fila inmediata superior a la fila de ceros y se sustituye la fila de ceros por los coeficientes de la derivada del polinomio auxiliar

Example 62

$$s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 + 25s + 50 = 0$$

$$\begin{array}{lccc} s^5 & 1 & 24 & 25 \\ s^4 & 2 & 48 & 50 \\ s^3 & 0 & 0 & \end{array}$$

Los términos de la fila s^3 son todos ceros. El polinomio auxiliar es formado por los coeficientes de la fila s^4. El polinomio auxiliar $P(s)$ es

$$P(s) = 2s^4 + 48s^2 + 50$$

lo cual indica que existe dos pares de raíces de igual magnitud pero con signo opuesto (esto es, dos raíces reales de la misma magnitud pero signo opuesto o dos raíces imaginarias conjugadas). Las raíce pueden ser obtenidas al solucionar la ecuación $P(s) = 0$. La derivada de $P(s)$ con respecto a s, es

$$\frac{dP(s)}{ds} = 8s^3 + 96s \tag{5.2}$$

Los términos de la fila s^3 son reemplazados por los coeficientes de la ecuación (5.2)

$$\begin{array}{cccc} s^5 & 1 & 24 & 25 \\ s^4 & 2 & 48 & 50 \\ s^3 & 8 & 96 & \\ s^2 & 24 & 50 & \\ s^1 & 79{,}3 & & \\ s^0 & 50 & & \end{array}$$

Note que no existe cambio de signo en la primera columna del nuevo arreglo, lo cual indica que no hay raíces con parte real positiva, pero al resolver el polinomio auxiliar

$$2s^4 + 48s^2 + 50 = 0$$

se obtienen las siguientes raíces

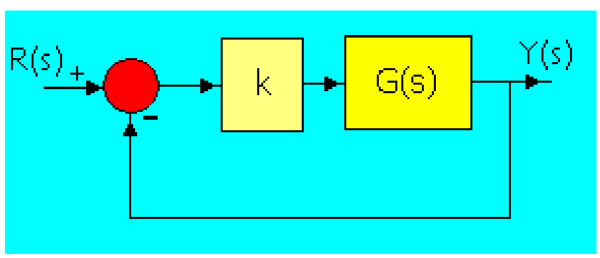
$$s = \pm 4{,}7863i \qquad s = \pm 1{,}0446i$$

la otra raíz se encuentra en $s = -2$

5.2. Rango de estabilidad

En el diseño de sistemas de control, algunas veces es necesario determinar el rango de un parametro para el cual el sistema es estable. Este rango de estabilidad puede ser determinado utilizando la prueba de Routh

Example 63 *Considere el siguiente sistema de control*



donde

$$G(s) = \frac{s^2 - 2s + 5}{s^3 + 5s^2 + 12s - 18}$$

Determine el rango de k que garantice la estabilidad del sistema de control