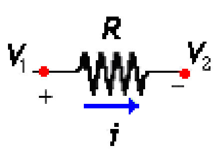
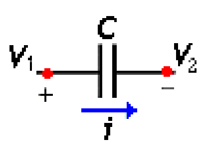
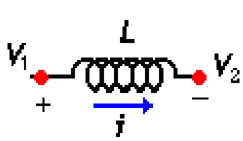
Capítulo 3

Modelado matemático

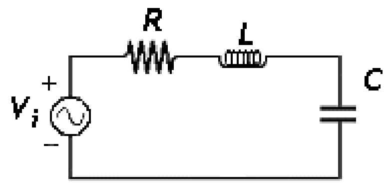
3.1. Sistemas Eléctricos

En esta sección se obtendrá la función de transferencia de circuitos eléctricos, que incluye redes pasivas y circuitos con amplificadores operacionales. Los circuitos equivalentes para las redes eléctricas con las que se iniciará el estudio están formados por tres componentes lineales pasivos: resistores, capacitores e inductores. En la siguiente tabla se resumen los componentes y la relación entre voltaje y corriente y entre voltaje y carga bajo condiciones iniciales de cero.

Componente	Voltaje – corriente	Voltaje – carga	Impedancia
	$v(t) = Ri(t)$	$v(t) = R\frac{dq(t)}{dt}$	R
	$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau$	$v(t) = \frac{1}{C}q(t)$	$\frac{1}{Cs}$
	$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$	$v(t) = L\frac{d^2q(t)}{dt^2}$	Ls

Posteriormente, se combinarán los componentes eléctricos en circuitos y se determinará la relación entre la entrada y salida (función de transferencia). Las ecuaciones de voltajes y/o corriente se obtendrán de las leyes de Kirchhoff y a partir de estas relaciones, se obtendrán las transformada de Laplace de estas ecuaciones para finalmente obtener la función de transferencia

Example 33 *Determine la función de transferencia que relacione el voltaje del capacitor $V_c(s)$, con el voltaje de entrada $V_i(s)$ del siguiente circuito RLC*



Solution 34 *Lo primero que se debe determinar es cuál debe ser la entrada y la salida. En este caso debemos tratar el voltaje del capacitor como la salida y el voltaje aplicado como la entrada. Si sumamos los voltajes alrededor de la malla, resulta la ecuación integro-diferencial para esta red*

$$v_L + v_C + v_R = v_i \tag{3.1}$$

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + v_C = v_i \tag{3.2}$$

La relación entre voltaje del capacitor y la corriente que circula por el elemento es dad por la siguiente ecuación:

$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt \to i(t) = C\frac{dv_C}{dt} \tag{3.3}$$

sustituyendo la ecuación (3.3) en (3.2) tendremos

$$LC\frac{d^2v_C}{dt^2} + RC\frac{dv_C}{dt} + v_C = v_i$$

Si se toma la transformada de Laplace suponiendo las condiciones iniciales cero, reacomodando términos y simplificando, resulta

$$\left(LCs^2 + RCs + 1\right)V_C(s) = V_i(s)$$

Al despejar la función de transferencia, obtenemos

$$\frac{V_C(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \tag{3.4}$$

Solution 35 *Es posible aplicar el concepto de impedancia para obtener la función de transferencia del circuito, utilizando la impedancia de cada uno de los componentes eléctricos que se ilustra en la tabla y sustituyendolos en (3.1), se tiene*

$$\begin{array}{l} \left(Ls + \frac{1}{Cs} + R\right)I(s) = V_i(s) \\ \frac{LCs^2+1+RCs}{Cs}I(s) = V(s) \end{array}$$

$$\frac{I(s)}{V(s)} = \frac{Cs}{LCs^2 + 1 + RCs} \tag{3.5}$$

El voltaje entre las terminales del capacitor $V_C(s)$, es el producto de la corriente y la impedancia del capacitor

$$V_C(s) = \frac{I(s)}{Cs} \tag{3.6}$$

Al despejar $I(s)$ de la ecuación (3.6) y sustituirlo en la ecuación (3.5) y simplicando se llega la mismo resultado de la ecuación (3.4)

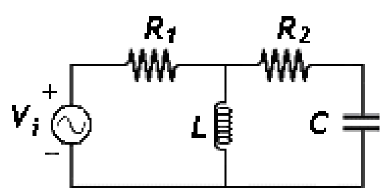
Solution 36 *Es posible determinar la función de transferencia por medio de la división de voltaje, es decir, ya que el voltaje entre las terminales del capacitor es una parte del voltaje de entrada, la impedancia del capacitor es dividida entre la suma de las impedancias*

$$V_C(s) = \frac{\frac{1}{Cs}}{\left(Ls + R + \frac{1}{Cs}\right)}$$

Al despejar la función de transferencia $\frac{V_C(s)}{V_i(s)}$, nos lleva la mismo resultado obtenido anteriormente.

Example 37 *Considere la red eléctrica del ejemplo anterior, determine la función de transferencia considernado la misma señal de entrada y como señal de salida, la corriente en el inductor. Aplique los métodos anteriores*

Example 38 *Dada la red de la siguiente figura, determine la función de trasnferencia entre el voltaje del capacitor y la señal de excitación $v_i(t)$*



Solution 39 *Considerando las impedancias de los componentes eléctricos y condiciones iniciales nulas, se obtiene, al aplicar la ley de las mallas*

$$R_1 I_1(s) + LsI_1(s) - LsI_2(s) = V_i(s)$$

donde $I_1(s)$ es la corriente que circula por la malla 1. Alrededor de la malla 2

$$LsI_2(s) + R_2 I_2(s) + \frac{1}{Cs} I_2(s) - LsI_1(s) = 0$$

donde $I_2(s)$ es la corriente que circula por la malla 2. La solución se puede obtener por cualquier método para resolver ecuaciones simultáneas

3.2. Sistemas Mecánicos

El oscilador masa-resorte es el ejemplo más sencillo de un sistema vibratorio de un grado de libertad.

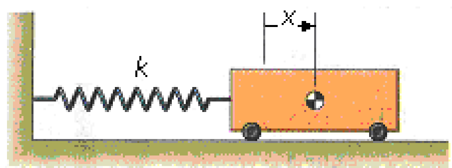


Fig. 10.1 Oscilador masa-resorte con un grado de libertad

Una sola coordenada x que mide el desplazamiento de la masa respecto a un punto de referencia es suficiente para especificar la posición del sistema. Suponiendo que el resorte no está estirado cuando $x = 0$ e ignorando la fricción, se puede obtener al aplicar la segunda ley de Newton, la ecuación del movimiento horizontal de la masa

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{3.7}$$

Supongamos que la masa está suspendida del resorte como se muestra en la figura 3.2, y que está sometida a movimiento vertical.Si el resorte no está estirado en $x = 0$, la ecuación del movimiento es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = g$$

Si la masa suspendidad está en reposo, la magnitud de la fuerza ejercida por el resorte debe ser igual al peso, $kx = mg$, por lo que la posición de equilibrio es $x = \frac{mg}{k}$. Incluyamos una nueva variable $\tilde{x}$ que mida la posición de la masa respecto a su posición de equilibrio:

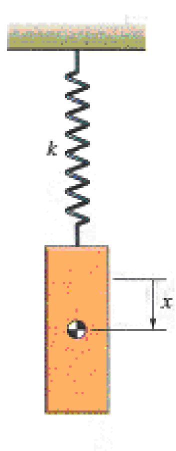


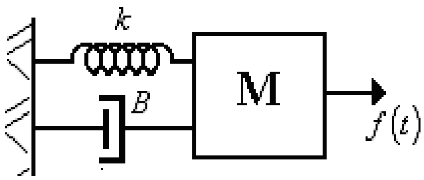
Figura 10.2 Sistema con masa suspendida

$\tilde{x} = x - \frac{mg}{k}$. Escribiendo la ecuación de movimiento en función de una variable obtenemos

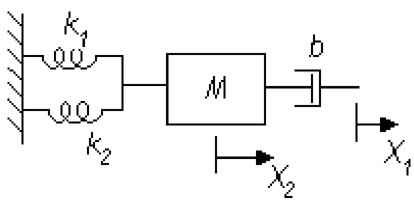
$$\frac{d^2\tilde{x}}{dt^2} + \frac{k}{m}\tilde{x} = 0 \tag{3.8}$$

que es identica a la ecuación (3.7). El movimiento vertical de la masa respecto a su posición de equilibrio está descrito por la misma ecuación que describe el movimiento horizontal de la masa con respecto a su posición de equilibrio.

Example 40 *Determine la función de transferencia* $\frac{X(s)}{F(s)}$ *del siguiente sistema mecánico*



Example 41 *Determine la función de transferencia* $\frac{X_2(s)}{X_1(s)}$ *del siguiente sistema mecánico*



Example 42 *Determine la función de transferencia* $\frac{X_2(s)}{F(s)}$ *del siguiente sistema mecánico*